## EPREUVE DE MATHEMATIQUES SP III

Durée 4 heures

---

Dans tout le problème, on désigne par :

**R** l'ensemble des nombres réels ;
$\mathbf{R}_+$ (respectivement $\mathbf{R}_+^*$) l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls (respectivement strictement positifs) ;
**Z** l'ensemble des entiers relatifs ;
x une variable réelle ;
y une fonction de la variable x définie sur une partie de **R**, y' et y", si elles existent, les dérivées première et seconde de y.

Le but de ce problème est d'étudier différentes propriétés d'une solution de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad xy'' + y' + xy = 0$$

## PREMIERE PARTIE

On s'intéresse à la recherche d'une solution de (E) développable en série entière et on exprime, de deux façons différentes, cette solution sous la forme de l'intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre.

I - 1 - Déterminer une solution F de (E) développable en série entière et telle que $F(0) = 1$ ; expliciter le rayon de convergence de la série obtenue et calculer $F'(0)$.

I - 2 - Soient g la fonction des deux variables x et $\theta$ définie sur $\mathbf{R} \times \left[0, \frac{\Pi}{2}\right]$ par :

$$(x, \theta) \longrightarrow g(x, \theta) = \cos(x \sin\theta)$$

et h la fonction des deux variables x et t définie sur $\mathbf{R} \times [0, 1[$ par : $\quad (x, t) \longrightarrow h(x, t) = \dfrac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$.

I - 2 - a - Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est absolument convergente quel que soit x dans **R**.

I - 2 - b - On pose :

$$G(x) = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} g(x, \theta)\,d\theta \; ; \qquad H(x) = \int_0^1 h(x, t)\,dt$$

I - 2 - b - i - Montrer que $G(x) = H(x)$ pour tout x appartenant à **R**.

I - 2 - b - ii - Montrer que **G** est indéfiniment dérivable sur **R** et donner l'expression de la dérivée d'ordre n de **G** sous forme d'une intégrale.

I - 2 - b - iii - Montrer que **G** est développable en série entière sur **R**.

I - 2 - c - On note respectivement **G'** et **G"** les dérivées première et seconde de **G**.

I - 2 - c - i - Calculer $G(0)$.

I - 2 - c - ii - Utilisant l'expression de **G'** obtenue en 2-b-ii- montrer que : $\quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad G'(x) = -x(G''(x) + G(x))$

I - 2 - c - iii - Exprimer $F(x)$ en fonction de $G(x)$, respectivement de $H(x)$

**A SUIVRE**

I - 2 - d - i - Montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$ , il existe $\alpha \in ]0,1[$ tel que, quel que soit $x$ dans $\mathbf{R}$ :

$$\left| \int_{\alpha}^{1} h(x, t)\, dt \right| < \varepsilon/2$$

I - 2 - d - ii - $\alpha$ étant ainsi choisi, calculer : $\lim_{x \to +\infty} \int_{0}^{\alpha} h(x,t)\, dt$

puis déterminer : $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

I - 2 - d - iii - Montrer que, pour tout $x$ appartenant à $\mathbf{R}$ : $H'(x) = \int_{0}^{1} \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$

I - 2 - d - iiii - Calculer : $\lim_{x \to +\infty} F'(x)$

## DEUXIEME PARTIE

On se propose de montrer, d'une part, que quel que soit l'entier relatif $k$, la fonction $F$ s'annule dans tout intervalle $]k\Pi, (k+1)\Pi[$ et d'autre part que si $\varphi$ désigne une solution de (E) sur un intervalle $]-\rho, \rho[$ avec $\rho > 0$ alors $\varphi$ et $F$ sont proportionnelles.

II - 1 - Vérifier que s'il existe un réel $x_i$ tel que $F(x_i) = 0$ alors $F(-x_i) = 0$ et $x_i$ est différent de zéro.

II - 2 - On suppose dans cette question que $x$ est strictement positif et on considère la fonction $u$ de la variable $x$ définie par :

$$x \to u(x) = \sqrt{x}\, F(x)$$

II - 2 - a - Montrer que $u$ vérifie une équation différentielle du second ordre du type :

$$u'' + A(x)\, u = 0$$

$u''$ désignant la dérivée seconde de $u$, $A$ une fonction de la variable $x$ que l'on explicitera.

II - 2 - b - Soit $v$ une application deux fois dérivable de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$.

Montrer que la relation :

$$(R_1) : \forall x \in \mathbf{R}_+^*, \frac{d}{dx}\left[u(x)\, v'(x) - u'(x)\, v(x)\right] = \frac{u(x)\, v(x)}{4x^2}$$

est vérifiée si et seulement si $v$ est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on explicitera.

**Tournez la page S.V.P.**

II - 2 - c - i - Déduire de ce qui précède que :

$$(R_2) : \forall p \in N^*, \int_{p\Pi}^{(p+1)\Pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2}\, dx = (-1)^{p+1} [u((p+1)\Pi) + u(p\Pi)]$$

II - 2 - c - ii - Montrer que $\int_0^{\Pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2}\, dx$ converge et est égale à $-u(\Pi)$.

II - 2 - d - Utilisant la question II-2-c, démontrer que, quel que soit p dans N, il existe $x_p \in ]p\Pi, (p+1)\Pi[$ tel que $u(x_p) = 0$ ; en conclure que F s'annule sur $R_+^*$, respectivement sur $R_-^*$, une infinité de fois.

II - 3 - a - Montrer que F est de signe constant sur $[-2, 2]$ et préciser ce signe.

II - 3 - b - Dans cette question $\varphi$ designe une solution de E sur $]-\rho, \rho[$, avec $\rho$ réel strictement positif.

On pose $\Delta = ]-\rho, \rho[ \cap [-2, 2]$.

II - 3 - b - i - Ecrire l'équation différentielle $(E_1)$ vérifiée par la fonction z définie sur $\Delta$ par :

$$z(x) = \frac{\varphi(x)}{F(x)}$$

II - 3 - b - ii - Déduire de $(E_1)$ que $x\, z'(x)\, F^2(x)$ est constant sur $\Delta$ ; en conclure que les restrictions de $\varphi$ et de F à $\Delta$ sont proportionnelles.

## TROISIEME PARTIE

$\lambda$ désignant un réel non nul, on étudie différentes propriétés de la fonction $F_\lambda$ de la variable x définie sur R par : $F_\lambda(x) = F(\lambda x)$.

III - 1 - a - Ecrire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $F_\lambda$.

III - 1 - b - Soit a un réel strictement positif. Déterminer toutes les solutions, développables en série entière, de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + axy = 0$$

III - 2 - Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ deux valeurs distinctes de $\lambda$. Montrer que, pour tout x réel l'expression

$$\frac{d}{dx}\left\{ x\left[F'_{\lambda_1}(x)\ F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x)\ F'_{\lambda_2}(x)\right]\right\} + \left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right) x\, F_{\lambda_1}(x)\, F_{\lambda_2}(x)$$

garde une valeur constante que l'on déterminera.

**A SUIVRE**

III - 3 - Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 x \; F_{x_i}(x) \; F_{x_j}(x) \; dx$$

sachant que $F(x_i) = F(x_j) = 0$ et $x_i \neq x_j$.

## QUATRIEME PARTIE

s étant un réel strictement positif on se propose de calculer :

$$F^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \; F(x) \; dx$$

IV - 1 - Montrer que $F^*$ converge quel que soit s strictement positif.

IV - 2 - a - t étant un réel quelconque, montrer que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(tx) \, dx$$

converge quel que soit s strictement positif et quel que soit t ; calculer sa valeur en fonction de t et de s.

IV - 2 - b - Montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+s^2)\sqrt{1-t^2}}$$

converge quel que soit s strictement positif et calculer sa valeur en fonction de s.

IV - 3 - On admet que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \left( \frac{2}{\Pi} \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) dx = \int_0^1 \frac{2}{\Pi \sqrt{1-t^2}} \left( \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(bx) \, dx \right) dt$$

IV - 3 - a - Calculer $F^*(s)$, $s > 0$.

IV - 3 - b - Calculer $\lim_{\substack{s > 0 \\ s \to 0}} F^*(s)$

**FIN**